Sätze aus Elemente der Analysis I von Wolf P. Barth

Tamás Gál (*tamas.gal@physik.stud.uni − erlangen.de*) | *http : //esistaus.de* | *V.*25.01.2007

0. Die reellen Zahlen

Satz 0.1 (Binomische Formel)
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

mit den Binomialkoeffizienten $(k = 0, ..., n)$

$$\binom{n}{k} := \prod_{\nu=1}^{k} \frac{n-\nu+1}{\nu} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

Satz 0.2 Nützliche Abschätzungen

a) (Bernoulli-Ungleichung) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl $1 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

b) Für jede reelle Konstante $K \in \mathbb{R}$ und jede relle Zahl $b > 1$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b^n > K$$

c) Für jede reelle Konstante $\epsilon > 0$ und jede relle Zahl b mit $0 < b < 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b^n < \epsilon$$

Satz 0.3 (Eigenschaften des Absolutbetrags)

a) Es ist stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

b) $|-x| = |x|$.

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

d) Falls $y \neq 0$, so ist $|x/y| = |x|/|y|$.

e) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

f) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x+y| \geq ||x| - |y||$ (Minus-Dreiecksungleichung).

Satz 0.4 Besitzt $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum $o \in \mathbb{R}$, so ist $o = max(A)$ durch A eindeutig bestimmt. (Analog ist $\min(A)$ durch A eindeutig bestimmt.)

Satz 0.5 (vom Supremum) Die Menge $A \subset \mathbb{R}$ sei nicht leer und nach oben beschränkt. Dann besitzt die Menge $B \subset \mathbb{R}$ der oberen Schranken von A ein Minimum.

1. Konvergenz

Satz 1.1 (Konvergenzkriterium von Cauchy) Die Folge reeller Zahlen (a_n) konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Satz 1.2 (Algebraische Rechenoperationen und konvergente Folgen) Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent. Dann gilt:

a) Die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

b) Die Differenzfolge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

c) Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

d) Wenn $b = \lim(b_n) \neq 0$ ist, dann konvergiert auch die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)/\lim_{n\to\infty}(b_n).$$

Satz 1.3 (Ungleichungen und konvergente Folgen) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt

$$a_n \leq b_n$$

für alle n, dann gilt auch

$$\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$$

Satz 1.4 (Konvergenz monotoner Folgen) Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Satz 1.5 (Konvergenz der Teilfolgen) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Grenzwert, wie die ursprüngliche Folge.

Satz 1.6 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.7 (Algebraische Rechenregeln für unendliche Reihen) Gegeben seien zwei konvergente Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = b,$$

sowie eine reelle Zahl c. Dann konvergieren die Reihen

	gegen
$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_\nu)$	$a+b$
$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu - b_\nu)$	$a-b$
$\sum_{\nu=0}^{\infty} c \cdot a_\nu$	$c \cdot a$

Satz 1.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert so, dass für alle $m > n > N(\epsilon)$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu \right| < \epsilon$$

Satz 1.9 (Notwendiges Konvergenzkriterium) Wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0$$

Satz 1.10 (Reihen mit positiven Summanden) Es sei $\sum a_\nu$ eine Reihe ohne negative Summanden, d.h. $a_\nu \geq 0$ für alle ν. Eine solche Reihe konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Satz 1.11 (Majorantenkriterium) Die Reihe $\sum a_\nu$ besitze eine konvergente Majorante $\sum b_\nu$. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_\nu$.

Satz 1.12 (Quotientenkriterium) Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty}$ eine Reihe mit $a_\nu \neq 0$ für alle ν. (Es reicht auch $a_n \neq 0$ für alle $\nu \geq N$.). Falls eine reelle Zahl

$$q < 1$$

existiert mit

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| \leq q$$

für alle ν (bzw. alle $\nu \geq N$), dann konvergiert $\sum a_\nu$.

Satz 1.13 (Leibnitzkriterium) Es sei (a_ν) eine Folge positiver Zahlen $a_\nu \geq 0$, die monoton fallend gegen 0 konvergiert: $\lim(a_\nu) = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$$

Satz 1.14 (Umordnungssatz) Die Reihe $\sum a_\nu$ sei absolut konvergent. Dann konvergiert sie in jeder Umordnung gegen denselben Grenzwert.

Satz 1.15 (Doppelreihensatz) Wenn eine Doppelreihe in irgend einer Anordnung absolut konvergiert, dann konvergiert sie in jeder beliebigen Anordnung, und zwar immer gegen denselben Grenzwert.

Satz 1.16 (Cauchyscher Produktsatz) Konvergieren die beiden Reihen

$$\sum_{\mu} a_\mu = a, \qquad \sum_{\nu} b_\nu = b$$

absolut, dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt gegen $a \cdot b$. (Die Produktreihe konvergiert auch in jeder beliebigen anderen Anordnung gegen $a \cdot b$.)

Satz 1.17 (Existenz der Dezimalbruchentwicklung) Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich in einen (endlichen und unendlichen) Dezimalbruch entwickeln.

Satz 1.18 (Eindeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung) Es seien

$$c_{-s}c_{-s+1}...c_{-1}c_0c_1c_2... = c'_{-s}c'_{-s+1}...c'_{-1}c'_0c'_1c'_2...$$

zwei verschiedene Dezimalbruchentwicklungen derselben reellen Zahl. Dann gibt es einen Index n mit:

$$\begin{aligned} c_\nu &= c'_\nu \text{ für } \nu = -s, ..., n-1; \\ c_n &= c'_n + 1; \\ c_\nu &= 0 \text{ für alle } \nu > n; \\ c_\nu &= 9 \text{ für alle } \nu > n. \end{aligned}$$

(Oder umgekehrt: c_ν und c'_ν vertauscht.)

Satz 1.19 (Periodische Dezimalbrueche) Jeder periodischer Dezimalbruch stellt eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ dar.

Satz 1.20 (Dezimalbruch-Darstellung rationaler Zahlen) Die Dezimalbruch-Entwicklung einer rationalen Zahl ist entweder endlich, oder periodisch.

2. Funktionen und Stetigkeit

Satz 2.1 (Umkehrfunktion)

a) Die Funktion $f : D \to W$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie den Definitionsbereich D bijektiv auf den Wertebereich W abbildet.

b) Ist $g : W \to D$ eine Umkehrfunktion zu f, dann ist f eine Umkehrfunktion zu g.

c) Die Umkehrfunktion ist, falls sie existiert, durch die Funktion f eindeutig bestimmt.

Satz 2.2 (Lemma von Abel) Die Potenzreihe $\sum c_n x^n$ konvergiere im Punkt x_0. Dann konvergiert sie auch in allen Punkten x des offenen Intervalls $]-|x_0|, |x_0|[$.

Satz 2.3 (Konvergenzintervalle) Der Konvergenzbereich

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sum c_n x^n \text{ konvergiert}\}$$

einer um den Nullpunkt entwickelten Potenzreihe ist

- entweder nur der Nullpunkt $x = 0$,
- oder ein Intervall symmetrisch zum Nullpunkt, also ein intervall der Form $[-r, r]$, $[-r, r[$, $]-r, r]$ oder $]-r, r[$ mit $0 < r \in \mathbb{R}$,
- oder die ganze reelle Achse.

Satz 2.4 (Modifizierte Potenzreihen) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ konvergiere auf dem Intervall $]-r, r[$ mit $r > 0$. Dann konvergieren auf diesem Intervall auch die modifizierten Reihen

$$\sum (n-1) \cdot c_n x^n, \sum n \cdot c_n x^n, \sum (n+1) \cdot c_n x^n, \quad \text{und} \quad \sum c_n x^{n-1}, \sum c_n x^{n+1}.$$

Satz 2.5 (Stetigkeit und algebraische Rechenoperationen) Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g$ und $f \cdot g$ stetig. Die Funktion f/g ist stetig, wo $g(x) \neq 0$ ist.

Satz 2.6 (Stetigkeit verknüpfter Funktionen) Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig, und die Funktion f sei stetig auf dem Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ von g. Dann ist $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 2.7 (ϵ-δ-Stetigkeit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:
Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$, existiert ein $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$, mit:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Satz 2.8 (Lemma) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und $x_0 \in D$ ein Punkt mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es eine δ-Umgebung von x_0 auf der auch $f(x) > 0$ gilt.

Satz 2.9 (Stetigkeit der Grenzfunktion) Die Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist f auf D stetig.

Satz 2.10 (Stetigkeit von Potenzreihenfunktionen) Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiere auf dem Intervall $]-r, r[$ gegen die Funktion f. Dann ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 2.11 (Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung) Die beiden Potenzreihen $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ mögen auf einem Intervall $]-r, r[,\ r > 0$ gegen dieselbe Funktion f konvergieren. Dann stimmen ihre Koeffizienten überein:

$$a_n = b_n \text{ für alle n}$$

Satz 2.12 (Zwischenwertsatz, erste Version) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $p \in (a, b)$ mit $f(p) = 0$.

Satz 2.13 (Polynome ungeraden Grades) Jedes Polynom

$$a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_1x + a_0$$

ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Satz 2.14 (Zwischenwertsatz, allgemeine Version) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist $c \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$.

Satz 2.15 (Existenz des Maximums) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem abgeschlossenen, endlichen Intervall $[a, b]$. Dann ist diese Funktion beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an. D.h., es gibt Zahlen $p, q \in [a, b]$ mit

$$\begin{aligned} f(p) &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(q) &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

Satz 2.16 (Korollar zu den Sätzen 2.14 und 2.15) Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall. Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist ihre Wertemenge $W = f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ wieder ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall.

Satz 2.17 (Stetigkeit und Umkehrfunktion) Die Funktion $f : [a, b] \to [u, v]$ sei stetig und streng monoton mit Bildintervall $[u, v]$. Dann ist $f : [a, b] \to [u, v]$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [u, v] \to [a, b]$ ist wieder stetig.

Satz 2.18 (Approximation durch Treppenfunktionen) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Satz 2.19 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Satz 2.20 (Uneigentliche Grenzwerte) Es sei f eine reellwertige Funktion. Wir sagen

$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, wenn	es ein K gibt, so dass f auf $[K, \infty[$ definiert ist und für alle $\epsilon > 0$ ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $\lvert f(x) - c\rvert < \epsilon$ für alle $x > L$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, wenn	es ein $h > 0$ gibt, so dass f definiert ist auf einem Intervall $]x_0, x_0 + h[$ oder $]x_0 - h, x_0[$ und zu jeder Schranke $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) > K$ für $\lvert x - x_0\rvert < \delta$.

Satz 2.21 (Exponentielles Wachstum) Für $x \to \infty$ wächst die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz x^n, $n \in \mathbb{N}$, von x und $\exp(-x)$ geht schneller gegen 0 als jede negative Potenz $1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, von x. Diese Abschätzungen kann man auch so formulieren

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \exp(-x) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 2.2 (Abschätzung der Winkelfunktion) Für $0 < x \leq 2$ ist

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$